c) $\forall x \in [1;+\infty[\ ; \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^3}{3} \leq x\text{-}1\text{-}\mathrm{Log}x \leq \dfrac{(x-1)^2}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1;+\infty[\ ; \dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)}{3} \leq \dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} \leq \dfrac{1}{2}$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)}{3}\right] = \dfrac{1}{2}$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{x-1}{\mathrm{Log}x} - 1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}x(x-1)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x-1-\mathrm{Log}x}{(x-1)^2} \times \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{Log}x}{x-1}}\right) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \dfrac{1}{2}$.

4)a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\forall x > 1; f'(x) = \dfrac{\mathrm{Log}x - (x-1)\frac{1}{x}}{(\mathrm{Log}x)^2}$

$= \dfrac{x\mathrm{Log}x - x + 1}{x(\mathrm{Log}x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(\mathrm{Log}x)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f

x	1		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	1	↗	$+\infty$

· $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\mathrm{Log}x}{x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

b) $\star \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

$\Rightarrow$ C_f possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

· la demi-tangente à droite à C_f en son point d'abscisse 1 a pour